
LÖSUNGEN ZU
KONRAD KÖNIGSBERGER: ANALYSIS I

— KAPITEL 10 —

TIM KOPISCHKE
DEZEMBER 2020

Aufgabe 1 : ☒
Aufgabe 2 : ☒
Aufgabe 3 : ☒
Aufgabe 4 : ☐

Aufgabe 5 : ☐
Aufgabe 6 : ☒
Aufgabe 7 : ☒

Aufgabe 1

(a). Das charakteristische Polynom ist $\lambda^4 - 1$, das sich faktorisieren lässt in

$$\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i) \quad (1)$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind folglich $1, -1, i, -i$. Somit ist ein reelles Fundamentalsystem gegeben durch $\{e^{-x}, e^x, \cos(x), \sin(x)\}$.

(b). Hier ist das charakteristische Polynom gegeben durch $\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4$. Eine Substitution von $z := \lambda^2$ führt auf die Gleichung

$$z^2 + 4z + 4 = 0 \quad (2)$$

mit den Lösungen $z_{1,2} = -2$. Also sind $\lambda_{1,2} = \sqrt{2}i$ und $\lambda_{3,4} = -\sqrt{2}i$ jeweils doppelte Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Gemäß Seite 179 ist ein reelles Fundamentalsystem damit gegeben durch $\{\cos(\sqrt{2}x), x \cos(\sqrt{2}x), \sin(\sqrt{2}x), x \sin(\sqrt{2}x)\}$.

(c). Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2$, das sich faktorisieren lässt in

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = \lambda^2(\lambda - 1 + \sqrt{2}i)(\lambda - 1 - \sqrt{2}i) \quad (3)$$

Also ist ein reelles Fundamentalsystem gegeben durch $\{1, x, e^x \cos(2x), e^x \sin(2x)\}$.

□

Aufgabe 2

Die Lösung der homogenen Gleichung ist für alle Aufgabenteile gegeben durch das Fundamentalsystem $\{\cos(x), \sin(x)\}$ mit $\{i, -i\}$ als den Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

(a). Gemäß Inhalt des Kapitels kann folgender Ansatz für die inhomogene Lösung gemacht werden,

$$y_p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (4)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite (Inhomogenität) liefert die Gleichungen

$$2c_2 + c_0 = 0$$

$$c_1 + 6c_3 = 0$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = 1$$

Also ist eine partikuläre Lösung gegeben durch

$$y_p(x) = -6x + x^3 \quad (5)$$

□

(b). Für $q(x) = \sinh(x)$ gilt die alternative Schreibweise bzw. Definition $q(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Gemäß Superpositionsprinzip (vgl. p. 181) müssen wir nur die Summanden $q_1(x) = e^x$ und $q_2(x) = e^{-x}$ als Inhomogenitäten betrachten und die partikuläre Lösung von $q(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{2}q_2$ ergibt sich dann als analoge Linearkombination der partikulären Lösungen zu q_1 und q_2 .

Die partikulären Lösungen ergeben sich hierbei ganz einfach aus den Ansätzen $y_{p,q_1} = Ce^x$ und $y_{p,q_2} = Ce^{-x}$ zu

$$y_{p,1} = \frac{1}{2}e^x$$

$$y_{p,2} = \frac{1}{2}e^{-x}$$

und eine eigentliche partikuläre Lösung y_p deshalb als

$$y_p = \frac{1}{2}y_{p,1} - \frac{1}{2}y_{p,2} = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\sinh(x) \quad (6)$$

□

(c). Dies wird mit Variation der Konstanten gelöst analog wie das Beispiel auf Seite 187. Das Gleichungssystem ist nun

$$\begin{pmatrix} \sin & \cos \\ \cos & -\sin \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sin \end{pmatrix} \quad (7)$$

mit Lösung

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin & \cos \\ \cos & -\sin \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sin \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cot \\ -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Es sind $U_1 := \log |\sin|$ und $U_2 := -x$ Stammfunktionen zu $u_1 = \cot$ und $u_2 = -1$. Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung ist also

$$y_p(x) = \log |\sin(x)| \sin(x) - x \cos(x) \quad (9)$$

□

Aufgabe 3

Die Differentialgleichung ist von der Form $P(y) = q(x)$ mit $P(y) = my'' + ky'$ und der Inhomogenität $q(x) = mg$. Eine Lösung der homogenen Gleichung $P(y) = 0$ ist durch Betrachtung des charakteristischen Polynoms gegeben durch

$$y_1 = C$$

$$y_2 = De^{-\frac{k}{m}x}$$

Ein Ansatz für die Inhomogenität ist gemäß Kapitel gegeben durch $y_p(x) = C_0x$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $k \cdot C_0 = mg$ und damit $y_p(x) = \frac{mg}{k} \cdot x$. Also gilt für jede Lösung y der Differentialgleichung, dass $y = y_h + y_p$ mit y_h beliebige Linearkombination der Elemente des Fundamentalsystems.

Für $x \rightarrow \infty$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = \frac{mg}{k}$. Die Endgeschwindigkeit ist also konstant.

□

Aufgabe 6

Königsberger gibt eine elegante Lösung für diese Aufgabe mit Hilfe von zusammengesetzten Funktion $s(x, y)$ und $u(x, y)$. Im Englischen ist dieses Setup auch als “coupled oscillators” bekannt und die folgende Lösung orientiert sich auch an einem der Wikipedia-Artikel.

Eine Alternative ist durch Ansatz von $x(t) = C_1 e^{i\phi t}$ und $y(t) = C_2 e^{i\phi t}$, d.h. man nimmt an, dass eine einzige Mode des Systems vorliegt.

Nach Einsetzen in das Differentialgleichungssystem enthält man die Gleichungen

$$-\phi^2 C_1 e^{i\phi t} = -a(C_1 e^{i\phi t}) - k(C_1 e^{i\phi t} - C_2 e^{i\phi t})$$

$$-\phi^2 C_2 e^{i\phi t} = -a(C_2 e^{i\phi t}) - k(C_2 e^{i\phi t} - C_1 e^{i\phi t})$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} -\phi^2 C_1 &= -aC_1 - k(C_1 - C_2) \\ -\phi^2 C_2 &= -aC_2 - k(C_2 - C_1) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= C_1(-a - k + \phi^2) + kC_2 \\ 0 &= C_2(-a - k + \phi^2) + kC_1 \end{aligned}$$

Das ist in Matrixschreibweise gleich

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a - k + \phi^2 & k \\ k & -a - k + \phi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Da die trivialen Lösungen mit $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$ uninteressant sind, muss die Matrix A aus der Gleichung oben singulär sein mit $\det(A) = 0$. Es ist aber

$$\det(A) = (-a - k + \phi^2)^2 - k^2 = 0 \quad (11)$$

Damit sind die Moden $\phi_{1,2}$ gegeben durch

$$\phi_{1,2} = \sqrt{(\pm k) + k + a} = \begin{cases} \sqrt{2k + a} \\ \sqrt{a} \end{cases} \quad (12)$$

Nach Einsetzen von ϕ_1 in die Matrix A erhält man

$$\begin{pmatrix} -a - k + 2k + a & k \\ k & -a - k + 2k + a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Eine Lösung ist $C_1 = 1, C_2 = -1$. Setzt man ϕ_2 ein, erhält man $C_1 = 1 = C_2$ als Lösung. Insgesamt erhält man insgesamt die allgemeine Lösungen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \eta_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{2k + a}t) + \eta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{a}t) \quad (14)$$

mit $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$. Diese kann man nun noch anpassen entsprechend der Anfangsbedingungen.

□

Aufgabe 7

(a). Wir machen den komplexen Ansatz $z(t) = x(t) + iy(t)$ und damit ist

$$\begin{aligned} z'' &= x'' + iy'' \\ &= 2uy' - \gamma x + (-2ux' - \gamma y)i \\ &= 2uy' - \gamma x - 2uix' - \gamma yi \\ &= 2u(y' - ix') - \gamma(x + iy) \\ &= 2u(y' - xi) - \gamma z \\ &= -2uiz' - \gamma z \end{aligned}$$

Die letzte Zeile folgt aus $z' = x' + iy' \iff iz' = ix' - y' \iff -iz' = y' - ix'$. Damit bekommen wir die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$z'' + 2uiz' + \gamma z = 0 \quad (15)$$

Das charakteristische Polynom hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -ui \pm \sqrt{u^2 + \gamma}i$ und damit ist ein (komplexes) Fundamentalsystem gegeben durch

$$\{e^{-uit} \sin(\sqrt{u^2 + \gamma}t), e^{-uit} \cos(\sqrt{u^2 + \gamma}t)\} \quad (16)$$

Wegen $|e^{-uit}| = 1$ ist $r_1(t) = |\sin(\sqrt{u^2 + \gamma}t)|$ und $r_2(t) = |\cos(\sqrt{u^2 + \gamma}t)|$. Dann ist aber

$$r_1(t + T) = |\cos(\sqrt{u^2 + \gamma}(t + T))| = |\cos(\sqrt{u^2 + \gamma}t + \sqrt{u^2 + \gamma} \frac{2\pi}{\sqrt{u^2 + \gamma}})| = r_1(t) \quad (17)$$

und analog für r_2 .

(b). Aus $z(0) = x_0 > 0$ folgt bereits, dass die Lösung $z_1(t) = e^{-uit} \sin(\sqrt{u^2 + \gamma}t)$ nicht in Frage kommt. Dann muss aber

$$z(t) = x_0 z_2(t) \tag{18}$$

Danach ist $z'(0) = x_0 z_2'(0) = (x_0(-u) + x_0\sqrt{u^2 + \gamma})i$. Also ist eine Wahl von $v_0 := x_0\sqrt{u^2 + \gamma} - x_0u$. Die Abstandsfunktion ergibt dann

$$r(t) = |z(t)| = x_0 |z_2(t)| = x_0 \tag{19}$$